数列多选题

1.【山东省青岛市 2020 届高三第三次模拟】在悠久灿烂的中国古代文化中，数学文化是其中的一朵绚丽的奇葩.《张丘建算经》是我国古代有标志性的内容丰富的众多数学名著之一，大约创作于公元五世纪.书中有如下问题："今有女善织，日益功疾，初日织五尺，今一月织九匹三丈，问日益几何？".其大意为："有一女子擅长织布，织布的速度一天比一天快，从第二天起，每天比前一天多织相同数量的布，第一天织5尺，一个月共织了九匹三丈，问从第二天起，每天比前一天多织多少尺布？".已知1匹$=4$丈，1丈$=10$尺，若这一个月有30天，记该女子这一个月中的第n天所织布的尺数为a_n，$b_n=2^{a_n}$，对于数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，下列选项中正确的为（　　）

A．$b_{10}=8b_5$　　B．$\{b_n\}$是等比数列　　C．$a_1b_{30}=105$　　D．$\dfrac{a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6}=\dfrac{209}{193}$

【答案】BD

【解析】由题意可知，数列$\{a_n\}$为等差数列，设数列$\{a_n\}$的公差为d，$a_1=5$，由题意可得

$30a_1+\dfrac{30\times 29d}{2}=390$，解得$d=\dfrac{16}{29}$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{16n+129}{29}$，$\because b_n=2^{a_n}$，

$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d$（非零常数），则数列$\{b_n\}$是等比数列，B 选项正确；

$\because 5d=5\times\dfrac{16}{29}=\dfrac{80}{29}\neq 3$，$\dfrac{b_{10}}{b_5}=\left(2^d\right)^5=2^{5d}\neq 2^3$，$\therefore b_{10}\neq 8b_5$，A 选项错误；

$a_{30}=a_1+29d=5+16=21$，$\therefore a_1b_{30}=5\times 2^{21}>105$，C 选项错误；$a_4=a_1+3d=5+3\times\dfrac{16}{29}=\dfrac{193}{29}$，

$a_5=a_1+4d=5+4\times\dfrac{16}{29}=\dfrac{209}{29}$，所以，$\dfrac{a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6}=\dfrac{3a_5}{3a_4}=\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{209}{193}$，D 选项正确．故选：BD.

2.【山东省菏泽市菏泽第一中学八一路校区 2019-2020 学年高二上学期 12 月月考数学试题】等差数列$\{a_n\}$是递增数列，满足$a_7=3a_5$，前n项和为S_n，下列选择项正确的是（　　）

A．$d>0$　　　　B．$a_1<0$

C．当$n=5$时S_n最小　　　　D．$S_n>0$时n的最小值为8

【答案】ABD

【解析】

由题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_7=3a_5$，可得$a_1+6d=3(a_1+4d)$，解得$a_1=-3d$，

又由等差数列$\{a_n\}$是递增数列，可知$d>0$，则$a_1<0$，故A,B正确；

因为$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n$，

由$n=-\frac{-\frac{7d}{2}n}{d}=\frac{7}{2}$可知，当$n=3$或$4$时$S_n$最小，故$C$错误，

令$S_n=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n>0$，解得$n<0$或$n>7$，即$S_n>0$时$n$的最小值为$8$，故$D$正确.

故选：ABD.

3．【山东省实验中学2020届高三6月模拟】记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若存在实数H，使得对任意的$n\in\mathbf{N}_+$，都有$|S_n|<H$，则称数列$\{a_n\}$为“和有界数列”. 下列说法正确的是（　　）

A．若$\{a_n\}$是等差数列，且公差$d=0$，则$\{a_n\}$是“和有界数列”

B．若$\{a_n\}$是等差数列，且$\{a_n\}$是“和有界数列”，则公差$d=0$

C．若$\{a_n\}$是等比数列，且公比$|q|<1$，则$\{a_n\}$是“和有界数列”

D．若$\{a_n\}$是等比数列，且$\{a_n\}$是“和有界数列”，则$\{a_n\}$的公比$|q|<1$

【答案】BC

【解析】对于A，B：若$\{a_n\}$是等差数列，则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$.

对于A选项，当$d=0$时，$S_n=na_1$，若$a_1\neq0$，根据一次函数的性质可知，此时不存在符合题意的H.

所以A选项错误.

对于B：$\{a_n\}$是“和有界数列”，而$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，若$d\neq0$，根据二次函数的性质可知，此时不存在符合题意的$H$，故$d=0$. 所以B选项正确.

对于C，D：若$\{a_n\}$是等比数列，则$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n+\frac{a_1}{1-q}$.

对于C选项，若$|q|<1$，则当$n\to+\infty$时，$S_n\to\frac{a_1}{1-q}$，故存在实数H，使得对任意的$n\in\mathbf{N}_+$，都有

$\left|S_n\right| < H$，即$\left\{a_n\right\}$是“和有界数列”．所以 C 选项正确.

对于 D 选项，若$\left\{a_n\right\}$是等比数列，且$\left\{a_n\right\}$是“和有界数列”，q的取值可能为-1，此时$\left|S_n\right| \le \left|a_1\right|$，

所以存在实数 H，使得对任意的$n \in \mathbf{N}_+$，都有$\left|S_n\right| < H$．所以 D 选项错误.

故选：BC.

4.【海南省海口市 2020 届高三高考模拟演练数学试题】已知正项等比数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1 = 2$，$a_4 = 2a_2 + a_3$，

若设其公比为 q，前 n 项和为S_n，则（　　）

A．$q = 2$　　B．$a_n = 2^n$　　C．$S_{10} = 2047$　　D．$a_n + a_{n+1} < a_{n+2}$

【答案】ABD

【解析】由题意$2q^3 = 4q + 2q^2$，得$q^2 - q - 2 = 0$，解得$q = 2$（负值舍去），选项 A 正确；

$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$，选项 B 正确；

$S_n = \dfrac{2\times\left(2^n - 1\right)}{2-1} = 2^{n+1} - 2$，所以$S_{10} = 2046$，选项 C 错误；

$a_n + a_{n+1} = 3a_n$，而$a_{n+2} = 4a_n > 3a_n$，选项 D 正确.

故选：ABD

5.【2020 届海南省天一大联考高三年级第四次模拟】已知数列$\left\{a_n\right\}$的首项为 4，且满足

$2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0\left(n \in N^*\right)$，则（　　）

A．$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$为等差数列

B．$\left\{a_n\right\}$为递增数列

C．$\left\{a_n\right\}$的前n项和$S_n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 4$

D．$\left\{\dfrac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

【答案】BD

【解析】由$2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$得$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = 2\times\dfrac{a_n}{n}$，所以$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是以$\dfrac{a_1}{1} = a_1 = 4$为首项，2 为公比的

等比数列，故 A 错误；因为$\dfrac{a_n}{n} = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$，所以$a_n = n\cdot 2^{n+1}$，显然递增，故 B 正确；

因为$S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$，$2S_n=1\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+2}$，所以

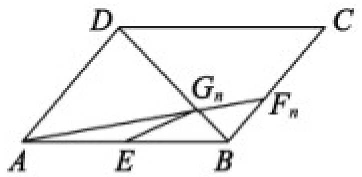
$-S_n=1\times 2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-n\cdot 2^{n+2}=\dfrac{2^2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\cdot 2^{n+2}$，故$S_n=(n-1)\times 2^{n+2}+4$，

故C错误；因为$\dfrac{a_n}{2^{n+1}}=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}}=n$，所以$\left\{\dfrac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n=\dfrac{n(1+n)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$，

故D正确.

故选：BD

6.【2020届山东省德州市高三第一次(4月)模拟】如图，已知点E是▱$ABCD$的边AB的中点，$F_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$为边$BC$上的一列点，连接$AF_n$交$BD$于$G_n$，点$G_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$满足$\overrightarrow{G_nD}=a_{n+1}\cdot\overrightarrow{G_nA}-2\left(2a_n+3\right)\cdot\overrightarrow{G_nE}$，其中数列$\left\{a_n\right\}$是首项为1的正项数列，$S_n$是数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和，则下列结论正确的是（　　）



A．$a_3=13$　　　　B．数列$\left\{a_n+3\right\}$是等比数列

C．$a_n=4n-3$　　　　D．$S_n=2^{n+1}-n-2$

【答案】AB

【解析】$\overrightarrow{G_nD}=a_{n+1}\cdot\overrightarrow{G_nA}-2\left(2a_n+3\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{G_nA}+\overrightarrow{G_nB}\right)$，

故$\overrightarrow{G_nD}=\left(a_{n+1}-2a_n-3\right)\cdot\overrightarrow{G_nA}-\left(2a_n+3\right)\cdot\overrightarrow{G_nB}$，$\overrightarrow{G_nD},\overrightarrow{G_nB}$共线，故$a_{n+1}-2a_n-3=0$，

即$a_{n+1}+3=2\left(a_n+3\right)$，$a_1=1$，故$a_n+3=4\times 2^{n-1}$，故$a_n=2^{n+1}-3$.

$a_3=2^4-3=13$，A正确；数列$\left\{a_n+3\right\}$是等比数列，B正确；

$a_n=2^{n+1}-3$，C错误；$S_n=4\dfrac{1-2^n}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，故$D$错误.

故选：AB.

7.【2020届山东省青岛市高三4月统一质量检测（一模）】已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S，$a_1=1$，$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，数列$\left\{\dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列选项正确的为（　　）

A．数列$\{a_n+1\}$是等差数列　　　　B．数列$\{a_n+1\}$是等比数列

C．数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n-1$　D．$T_n<1$

【答案】BCD

【解析】由$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$即为$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，

可化为$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，由$\boldsymbol{S_1=a_1=1}$，可得数列$\{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

则$a_n+1=2^n$，即$a_n=2^n-1$，

又$\frac{2^n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，可得

$T_n=1-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$，

故A错误，B，C，D正确.

故选：BCD.

8.【2020届山东省威海市高三一模数学试题】等差数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，若$a_1>0$，$S_{10}=S_{20}$，则（　　）

A．$d<0$　　　B．$a_{16}<0$　　　C．$S_n\le S_{15}$　　　D．当且仅当$S_n<0$时$n\ge 32$

【答案】ABC

【解析】因为等差数列中$S_{10}=S_{20}$，所以$a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{19}+a_{20}=5(a_{15}+a_{16})=0$，又$a_1>0$，所以$a_{15}>0,a_{16}<0$，所以$d<0$，$S_n\le S_{15}$，故$ABC$正确；因为$S_{31}=\frac{31(a_1+a_{31})}{2}=31a_{16}<0$，故D错误,故选：$ABC$

9.【山东省济南市2020届高三6月针对性训练（仿真模拟）】设$\{a_n\}$是无穷数列，若存在正整数k，使得对任意$n\in\mathbf{N}_+$，均有$a_{n+k}>a_n$，则称$\{a_n\}$是间隔递增数列，k是$\{a_n\}$的间隔数，下列说法正确的是（　　）

A．公比大于1的等比数列一定是间隔递增数列

B．已知$a_n=n+\frac{4}{n}$，则$\{a_n\}$是间隔递增数列

C．已知$a_n=2n+(-1)^n$，则$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是2

D．已知$a_n=n^2-tn+2020$，若$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是3，则$4\le t<5$

【答案】BCD

【解析】对于 A：$a_{n+k}-a_n=a_1q^{n+k-1}-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}\left(q^k-1\right)$，因为 $q>1$，所以当 $a_1<0$ 时，$a_{n+k}<a_n$，故错误；

对于 B：$a_{n+k}-a_n=n+k+\frac{4}{n+k}-\left(n+\frac{4}{n}\right)=k\left(1-\frac{4}{(n+k)n}\right)=k\left(\frac{n^2+kn-4}{(n+k)n}\right)$，令 $t=n^2+kn-4$，

t 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 单调递增，则 $t(1)=1+k-4>0$，解得 $k>3$，故正确；

对于 C：$a_{n+k}-a_n=2(n+k)+(-1)^{n+k}-\left[2n+(-1)^n\right]=2k+(-1)^n\left((-1)^k-1\right)$，当 n 为奇数时，$2k-(-1)^k+1>0$，存在 $k\ge1$ 成立，当 n 为偶数时，$2k+(-1)^k-1>0$，存在 $k\ge2$ 成立，综上：$\{a_n\}$ 是间隔递增数列且最小间隔数是 2，故正确；

对于 D：若 $\{a_n\}$ 是间隔递增数列且最小间隔数是 3，

则 $a_{n+k}-a_n=(n+k)^2-t(n+k)+2020-\left(n^2-tn+2020\right)=2kn+k^2-tk>0$，$n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则 $k^2+(2-t)k>0$，对于 $k\ge3$ 成立，且 $k^2+(2-t)k\le0$，对于 $k\le2$ 成立，即 $k+(2-t)>0$，对于 $k\ge3$ 成立，且 $k+(2-t)\le0$，对于 $k\le2$ 成立，所以 $t-2<3$，且 $t-2\ge2$，解得 $4\le t<5$，故正确.

故选：BCD.

10.【2020 年新高考新题型多项选择题专项训练】设 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 是各项为正数的等比数列，q 是其公比，K_n 是其前 n 项的积，且 $K_5<K_6$，$K_6=K_7>K_8$，则下列选项中成立的（　　）

A．$0<q<1$　　　　B．$a_7=1$

C．$K_9>K_5$　　　　D．K_6 与 K_7 均为 K_n 的最大值

【答案】ABD

【解析】根据题意，依次分析选项：

对于 B，若 $K_6=K_7$，则 $a_7=\frac{K_7}{K_6}=1$，故 B 正确；

对于 A，由 $K_5<K_6$ 可得 $a_6=\frac{K_6}{K_5}>1$，则 $q=\frac{a_7}{a_6}\in(0,1)$，故 A 正确；

对于 C，由 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等比数列且 $q\in(0,1)$ 可得数列单调递减，则有 $K_9<K_5$，故 C 错误；

对于 D，结合 $K_5<K_6$，$K_6=K_7>K_8$，可得 D 正确.

故选：ABD.

11.【2020届山东省济宁市高三上学期期末】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q, 其前 n 项和为S_n, 前 n 项积为T_n,

并满足条件$a_1>1, a_{2019}a_{2020}>1$, $\frac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$, 下列结论正确的是(　　)

A. $S_{2019}<S_{2020}$　　　　　　　　B. $a_{2019}a_{2021}-1<0$

C. T_{2020}是数列$\{T_n\}$中的最大值　　　　D. 数列$\{T_n\}$无最大值

【答案】AB

【解析】当$q<0$时，$a_{2019}a_{2020}=a_{2019}{}^2q<0$，不成立；

当$q\geq 1$时，$a_{2019}\geq 1, a_{2020}>1$，$\frac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$不成立；

故$0<q<1$，且$a_{2019}>1, 0<a_{2020}<1$，故$S_{2020}>S_{2019}$，A正确；

$a_{2019}a_{2021}-1=a_{2020}{}^2-1<0$，故$B$正确；

T_{2019}是数列$\{T_n\}$中的最大值，CD错误；

故选：AB

12．【2020届山东省曲阜市第一中学高三下学期3月线上自我检测】在《增删算法统宗》中有这样一则故事："三百七十八里关，初行健步不为难；次日脚痛减一半，如此六日过其关."则下列说法正确的是（　　）

A．此人第二天走了九十六里路　　　　B．此人第三天走的路程站全程的$\frac{1}{8}$

C．此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里　D．此人后三天共走了42里路

【答案】ACD

【解析】设此人第n天走a_n里路，则数列$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为$q=\frac{1}{2}$的等比数列，因为$S_6=378$，

所以$S_6=\frac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}}=378$，解得$a_1=192$.

对于A，由于$a_2=192\times\frac{1}{2}=96$，所以此人第二天走了九十六里路，所以A正确；

对于B，由于　$a_3=192\times\frac{1}{4}=48, \frac{48}{378}>\frac{1}{8}$，所以B不正确；

对于C，由于$378-192=186, 192-186=6$，所以此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里，所

以 C 正确；

对于 D，由于 $a_4+a_5+a_6=192\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)=42$，所以 D 正确，

故选：ACD.

13.【2020 届山东省济宁市嘉祥一中高三第三次质量检测】已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足

$a_{n+1}=2a_n+b_n,b_{n+1}=a_n+2b_n+\ln\frac{n+1}{n^3}(n\in N^*),a_1+b_1>0$.

给出下列四个命题，其中的真命题是（　　）

A．数列$\{a_n-b_n\}$单调递增；　　　　B．数列$\{a_n+b_n\}$ 单调递增；

C．数$\{a_n\}$从某项以后单调递增；　　　D．数列$\{b_n\}$从某项以后单调递增.

【答案】 BCD

【解析】 对于 A：因为$a_{n+1}=2a_n+b_n,b_{n+1}=a_n+2b_n+\ln\frac{n+1}{n}$，所以$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n-\ln\frac{n+1}{n^3}$，

当$n=1$时，$a_2-b_2=a_1-b_1-\ln 2$，所以$a_2-b_2<a_1-b_1$，所以 A 为假命题；

对于 B：$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)+\ln\frac{n+1}{n^3}$，$a_{n+1}+b_{n+1}-\ln(n+1)=3(a_n-b_n-\ln n)$，所以

$\{a_n+b_n-\ln n\}$是等比数列，$a_n+b_n=\left(a_1+b_1\right)\cdot 3^{n-1}+\ln n$，所以 B 为真命题；

对于 C：$a_{n+1}=2a_n+b_n=a_n+\ln n+(a_1+b_1)3^{n-1}$，故$a_{n+1}-a_n=\ln n+(a_1+b_1)3^{n-1}>0$，C 为真命题；

对于 D：因为$b_{n+1}=b_n+a_n+b_n+\ln\frac{n+1}{n^3}$，所以$b_{n+1}-b_n=\ln(n+1)-2\ln n+(a_1+b_1)3^{n-1}$，

根据指数函数性质，知数列从某一项以后单调递增，所以 D 真命题.

故选：BCD.

14.【2020 届泉州市高三毕业班线上质量检测】已知$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，$f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$.

若$f\left(1\right)=1$，则（　　）

A．$f\left(x\right)$是周期函数

B．当n为偶数时，$f\left(n\right)=0$

C．$f\left(1\right)+2^2f\left(2\right)+3^2f\left(3\right)+\cdots+6^2f\left(6\right)=16$

D．$f\left(1\right)+2^2f\left(2\right)+3^2f\left(3\right)+\ldots+\left(4n+2\right)^2f\left(4n+2\right)=8n^2+8n+1$

【答案】 ABD

【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，又 $f(1+x)=f(1-x)$，所以

$f(x+2)=f(-x)=-f(x)$.

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，可得函数 $f(x)$ 的周期为 4，选项 A 正确；

$f(-2)=-f(2)=-f(0)=0$，即 $f(-2)=f(2)=f(0)$，又因为函数周期为 4，所以当 n 为偶数时，

$f(n)=0$，选项 B 正确；

因为 $f(-1)=-f(1)=-1$，周期 $T=4$，所以 $f(1)+2^2f(2)+3^2f(3)+\cdots+6^2f(6)=1-3^2+5^2=17$，

所以选项 C 是错的；

$f(1)+2^2f(2)+3^2f(3)+\cdots+(4n+2)^2f(4n+2)=1-3^2+5^2-7^2+9^2+\cdots+(4n+1)^2$

$=1+(5^2-3^2)+(9^2-7^2)+\cdots\left[-(4n-1)^2+(4n+1)^2\right]=1+2\left[3+5+7+9+\cdots+(4n-1)+(4n+1)\right]$

$=1+2\times\dfrac{2n(3+4n+1)}{2}=1+2n(4n+4)=8n^2+8n+1$

所以选项 D 是正确的.

故选：ABD.

15.【2020 届山东省潍坊市高三 2 月数学模拟试题（二）】将 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个数阵，如图：该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列，每一行的 n 个数从左到右构成以 m 为公比的等比数列（其中 $m>0$）. 已知 $a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，记这 n^2 个数的和为 S. 下列结论正确的有（　　）

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

A. $m=3$　　　　B. $a_{67}=17\times3^7$

C. $a_{ij}=(3i-1)\times3^{j-1}$　　　　D. $S=\dfrac{1}{4}n(3n+1)(3^n-1)$

【答案】ACD

【解析】∵$a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，∴$2m^2=2+5m+1$，解得 $m=3$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$（舍去），

∴$a_{ij}=a_{i1}\cdot3^{j-1}=[2+(i-1)\times m]\cdot3^{j-1}=(3i-1)\cdot3^{j-1}$，

∴$a_{67}=17\times3^6$，

∴$S=(a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots\cdots+a_{2n})+\cdots\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots\cdots+a_{nn})$

$=\frac{a_{11}(1-3^n)}{1-3}+\frac{a_{21}(1-3^n)}{1-3}+\cdots\cdots+\frac{a_{n1}(1-3)^n}{1-3}$

$=\frac{1}{2}$（3^n－1）$\bullet\frac{(2+3n-1)\ n}{2}$

$=\frac{1}{4}n$（$3n$+1）（3^n－1）

故选：*ACD.*

16.【2020 届山东省潍坊市高三上学期期末】已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=-\frac{2}{3}$，等差数列$\{b_n\}$的首项$b_1=12$，若$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，则以下结论正确的有（　　）

A．$a_9\cdot a_{10}<0$　B．$a_9>a_{10}$　C．$b_{10}>0$　D．$b_9>b_{10}$

【答案】AD

【解析】$\because$ 等比数列$\{a_n\}$的公比$q=-\frac{2}{3}$，$\therefore a_9$和a_{10}异号，$\therefore a_9a_{10}<0$，故 A 正确；

但不能确定a_9和a_{10}的大小关系；故 B 不正确；$\because a_9$和a_{10}异号，且$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，

$\therefore b_9$和b_{10}中至少有一个数是负数，又$\because b_1=12>0$，$\therefore d<0$　$\therefore b_9>b_{10}$，故 D 正确，

$\therefore b_{10}$一定是负数，即$b_{10}<0$，故 C 不正确；

故选：AD

17.【海南省海口市 2020 届高三高考模拟演练】已知a_1，a_2，a_3，a_4成等比数列，满足$a_1+a_2+a_3+a_4=(a_2+a_3+a_4)^2$，且$a_4>1$，下列选项正确的是（　　）

A．$a_1>a_3$　B．$a_3>a_4$　C．$a_1>a_2$　D．$a_2<a_4$

【答案】AD

【解析】a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，设公比为

$q.\because a_1+a_2+a_3+a_4=(a_2+a_3+a_4)^2,\therefore\frac{a_4}{q^3}+\frac{a_4}{q^2}+\frac{a_4}{q}+a_4=\left(\frac{a_4}{q^2}+\frac{a_4}{q}+a_4\right)^2$，

$\therefore\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=a_4\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1\right)^2,\because a_4>1,\therefore\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1>\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1\right)^2$，

整理得$\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^3}+\frac{2}{q^2}+\frac{1}{q}<0$，即$q^3+2q^2+q+1<0$.

令$f(x)=x^3+2x^2+x+1$，则$f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$.

由 $f'(x)>0$，得 $x>-\frac{1}{3}$ 或 $x<-1$；由 $f'(x)<0$，得 $-1<x<-\frac{1}{3}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=1$，极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{23}{27}>0$.

又 $f(-2)=-1<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 上有一个零点 x_0.

即 $q^3+2q^2+q+1<0$ 时，$q<x_0<-1$，$\therefore q^2>1$.

$\because a_4>1$，$\therefore$ 等比数列 a_1,a_2,a_3,a_4 中，a_1,a_3 均为负数，a_2,a_4 均为正数.

$\therefore a_3=a_1q^2<a_1,a_4=a_2q^2>a_2$.

故选：AD.

18.【山东省济南市第一中学 2019-2020 学年高三上学期期中】设 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 为其前 n 项和，且 $S_7<S_8$，$S_8=S_9>S_{10}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$d<0$　　B．$a_9=0$　　C．$S_{11}>S_7$　　D．S_8、S_9 均为 S_n 的最大值

【答案】ABD

【解析】由 $S_7<S_8$ 得 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_7<a_1+a_2+\ldots+a_7+a_8$，即 $a_8>0$，

又$\because S_8=S_9$，$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_8=a_1+a_2+\ldots+a_8+a_9$，$\therefore a_9=0$，故 B 正确；

同理由 $S_9>S_{10}$，得 $a_{10}<0$，$\because d=a_{10}-a_9<0$，故 A 正确；

对 C，$S_{11}>S_7$，即 $a_8+a_9+a_{10}+a_{11}>0$，可得 $2(a_9+a_{10})>0$，

由结论 $a_9=0,a_{10}<0$，显然 C 是错误的；$\because S_7<S_8,S_8=S_9>S_{10},\therefore S_8$ 与 S_9 均为 S_n 的最大值，故 D 正确；故选：ABD.

19.【辽宁省丹东市 2019-2020 学年高三下学期期中】已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，那么下列数列一定是等比数列的是（　　）

A．$\{\frac{1}{a_n}\}$　　B．$\log_2(a_n)^2$　　C．$\{a_n+a_{n+1}\}$　　D．$\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$

【答案】AD

【解析】$a_n=1$ 时，$\log_2(a_n)^2=0$，数列 $\{\log_2(a_n)^2\}$ 不一定是等比数列，$q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，

数列$\{a_n+a_{n+1}\}$不一定是等比数列，由等比数列的定义知$\{\frac{1}{a_n}\}$和$\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$都是等比数列．故选 AD．

20．【江苏省苏州市姑苏区 2019-2020 学年高二上学期期中】对于数列$\{a_n\}$，若存在正整数k $(k\geq 2)$，使得$a_k<a_{k-1}$，$a_k<a_{k+1}$，则称a_k是数列$\{a_n\}$的“谷值，k是数列$\{a_n\}$的“谷值点”，在数列$\{a_n\}$中，若$a_n=\left|n+\frac{9}{n}-8\right|$，则数列$\{a_n\}$的“谷值点”为(　　)

A．2　　B．3　　C．5　　D．7

【答案】AD

【解析】因为$a_n=\left|n+\frac{9}{n}-8\right|$，所以$a_1=2,a_2=\frac{3}{2},a_3=2,a_4=\frac{7}{4},a_5=\frac{6}{5},a_6=\frac{1}{2},a_7=\frac{2}{7},a_8=\frac{9}{8}$，

当$n\geq 7,n\in N$，$n+\frac{9}{n}-8>0\therefore a_n=\left|n+\frac{9}{n}-8\right|=n+\frac{9}{n}-8$，此时数列单调递增，

$a_2<a_1$，$a_2<a_3$，$a_7<a_6$，$a_7<a_8$，所以数列$\{a_n\}$的“谷值点”为 2，7．

故选：AD

21．【2020 届山东省潍坊市高三上学期 12 月份月结学情数学试题】在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\frac{1}{\tan A}$，$\frac{1}{\tan B}$，$\frac{1}{\tan C}$依次成等差数列，则下列结论中不一定成立的是(　　)

A．a，b，c依次成等差数列

B．$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$依次成等差数列

C．a^2，b^2，c^2依次成等差数列

D．a^3，b^3，c^3依次成等差数列

【答案】ABD

【解析】$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\frac{1}{\tan A}$，$\frac{1}{\tan B}$，$\frac{1}{\tan C}$依次成等差数列，

则：$\frac{2}{\tan B}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$，利用$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，整理得：$\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{\cos A}{\sin A}$，利用正弦和余弦定理得：$2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$，整理得：$2b^2=a^2+c^2$，

即：a^2,b^2,c^2依次成等差数列.此时对等差数列a^2,b^2,c^2的每一项取相同的运算得到数列a，b，c或$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$或a^3，b^3，c^3，这些数列一般都不可能是等差数列，除非$a=b=c$，但题目没有说$\triangle ABC$是等边三角形，故选：ABD.

22.【山东省烟台市 2019-2020 学年高三上学期期中】下列结论正确的是(　　)

A．若$a>b>0,c<d<0$，则一定有$\frac{b}{c}>\frac{a}{d}$

B．若$x>y>0$，且$xy=1$，则$x+\frac{1}{y}>\frac{y}{2^x}>\log_2(x+y)$

C．设$\{a_n\}$是等差数列，若$a_2>a_1>0$,则$a_2>\sqrt{a_1a_3}$

D．若$x\in[0,+\infty)$，则$\ln(1+x)\ge x-\frac{1}{8}x^2$

【答案】AC

【解析】选项 A，由$c<d<0$，可得$-c>-d>0$，则$-\frac{1}{d}>-\frac{1}{c}>0$，

又$a>b>0$，所以$-\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}$，则$\frac{b}{c}>\frac{a}{d}$，故 A 正确.

选项 B，取$x=2,y=\frac{1}{2}$，则$x+\frac{1}{y}=4,\frac{y}{2^x}=\frac{1}{8},\log_2(x+y)=\log_2\frac{5}{2}>1$，

不等式不成立，故 B 不正确.

选项 C，由题意得$a_1+a_3=2a_2$且$a_1\ne a_3$，

所以$a_2=\frac{1}{2}(a_1+a_3)>\frac{1}{2}\times2\sqrt{a_1a_3}=\sqrt{a_1a_3}$，故 C 正确.

选项 D，设$h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{8}x^2$，则$h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+\frac{x}{4}=\frac{x(x-3)}{4(x+1)}$，

当$0<x<3$时，$h'(x)<0$，则$h(x)$单调递减，$h(x)<h(0)=0$，故 D 不正确.

故选：AC.

23.【山东省莱州市第一中学 2019-2020 学年高三 10 月月考】已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，前n项和为S_n，满足$a_1+5a_3=S_8$，下列选项正确的有（　　）

A．$a_{10}=0$　　B．$S_7=S_{12}$　　C．S_{10}最小　　D．$S_{20}=0$

【答案】AB

【解析】因为$\{a_n\}$是等差数列，设公差为d，由$a_1+5a_3=S_8$，

可得$a_1+9d=0$，即$a_{10}=0$，即选项A正确，

又$S_{12}-S_7=a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=5a_{10}=0$，即选项B正确，

当$d>0$时，则S_9或S_{10}最小，当$d<0$时，则S_9或S_{10}最大，即选项C错误，

又$S_{19}=19a_{10}=0$，$a_{20}\neq 0$，所以$S_{20}\neq 0$，即选项D错误，

故选AB.