

高三数学(理科)试卷

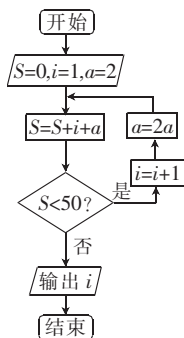
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分.考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\frac{2-2i}{z} = (1+i)^2$ (i 为虚数单位),则复数 $z =$
 - A. $1+i$
 - B. $1-i$
 - C. $-1-i$
 - D. $-1+i$
2. 设集合 $A = \{x | 0 \leq \log_3 x \leq 2\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x^2 - 3x - 18}\}$,则 $A \cap B =$
 - A. $[1, 3]$
 - B. $[-3, 6]$
 - C. $[3, 9]$
 - D. $[6, 9]$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_n = 2^n + 1$,则 $a_{10} =$
 - A. 1024
 - B. 512
 - C. 256
 - D. 1025
4. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$,则 $f(x)$ 的单调递减区间为
 - A. $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$
 - B. $[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$
 - C. $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$
 - D. $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$
5. 已知偶函数 $f(x) = (2-a)x^3 + bx^2 + 2$ 的定义域为 $(-6m, m^2 + 9)$,则 $g(x) = \log_2(x-a) + m$ 在 $[4, 10]$ 上的最大值为
 - A. 4
 - B. 5
 - C. 6
 - D. 7
6. 下面程序框图输出的 i 的值为
 - A. 4
 - B. 7
 - C. 6
 - D. 5
7. 甲、乙等四名同学分别来自同一学校三个不同的班级(其中只有甲、乙两人来自同一班级),他们代表班级参加语、数、英三科竞赛的决赛(每名同学三科竞赛都参加且无其他考生),则三科竞赛冠军分别来自三个不同班级的概率为
 - A. $\frac{3}{32}$
 - B. $\frac{3}{16}$
 - C. $\frac{3}{8}$
 - D. $\frac{1}{4}$
8. 在四面体 $ABCD$ 中,且 $AB \perp AC, AC \perp CD, AB, CD$ 所成的角为 $30^\circ, AB=5, AC=4, CD=3$,则四面体 $ABCD$ 的体积为
 - A. 5
 - B. 6
 - C. 7
 - D. 8



9. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=2$, 且 $a_{n+1}=-\frac{1}{3}S_nS_{n+1}$, 则 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\dots+\frac{1}{S_{22}}=$
 A. -66 B. 77 C. 88 D. 99
10. 某正四面体的外接球与内切球的表面积之差为 12π , 则该正四面体的棱长为
 A. 3 B. 4 C. 2 D. $2\sqrt{3}$
11. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的准线与 x 轴的交点为 H , 点 F 为抛物线的焦点, 点 P 在抛物线上且 $|PH|=k|PF|$, 当 k 最大时, 点 P 恰好在以 H, F 为焦点的双曲线上, 则该双曲线的方程为
 A. $\frac{x^2}{2-\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}-1}=1$ B. $\frac{x^2}{3+\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}+1}=1$
 C. $\frac{x^2}{2\sqrt{2}-2}-\frac{y^2}{3-2\sqrt{2}}=1$ D. $\frac{x^2}{3-2\sqrt{2}}-\frac{y^2}{2\sqrt{2}-2}=1$
12. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , $\vec{CO}=m\vec{CB}+n\vec{CA}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), $|\vec{CA}|=6$, $|\vec{CB}|=8$, $\tan\angle ACB=\sqrt{7}$, 则 $m-n=$
 A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{24}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{24}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式中各项的系数之和为 243, 则 $n=$ \blacktriangle .

14. 已知函数 $f(x)=3x^2+ae^x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 垂直, 则 $a=$ \blacktriangle .

15. 若圆锥曲线 $\frac{x^2}{5-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-1}=1$ 的离心率为 $\sqrt{\lambda}$, 则 $\lambda=$ \blacktriangle .

16. 定义: 若函数 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$, 则称区间 $[a, b]$ 是函数 $F(x)$ 的“完美区间”. 另外, 定义区间 $[a, b]$ 的“复区间长度”为 $2(b-a)$, 则函数 $f(x)=|x^2-1|$ 的所有“完美区间”的“复区间长度”的和为 \blacktriangle .

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $a=\sqrt{3}, b+c=3$.

(1) 若 $A=\frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

18. (12分)

2019年,中华人民共和国成立70周年.为了庆祝建国70周年,某中学在全校进行了一次爱国主义知识竞赛,共1000名学生参加,答对题数(共60题)分布如下表所示:

组别	$[0,10]$	$(10,20]$	$(20,30]$	$(30,40]$	$(40,50]$	$(50,60]$
频数	10	185	265	400	115	25

答对题数 Y 近似服从正态分布 $N(\mu, 81)$, μ 为这 1000 人答对题数的平均值(同一组数据用该组区间的中点值作为代表).

- 估计答对题数在 $(12, 48]$ 内的人数(精确到整数位).
- 学校为此次参加竞赛的学生制定如下奖励方案:每名同学可以获得 2 次抽奖机会,每次抽奖所得奖品的价值与对应的概率如下表所示.

获得奖品的价值(单位:元)	0	10	20
概率	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

用 X (单位:元)表示学生甲参与抽奖所得奖品的价值,求 X 的分布列及其数学期望.

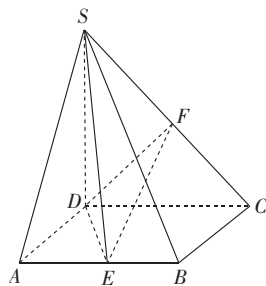
附:若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < Z \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

19. (12分)

如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $SD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别为 AB, SC 的中点.

- 证明: $EF \parallel$ 平面 SAD .
- 若 $SD=8$, 求二面角 $D-EF-S$ 的正弦值.



20. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\mathbf{m} = (x + \sqrt{2}, y)$, $\mathbf{n} = (x - \sqrt{2}, y)$, 且 $|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}| = 4$. 记动点 $P(x, y)$ 的轨迹为 C .

- 求 C 的方程;
- 已知直线 l 过坐标原点, 且与 C 交于 M, N 两点, M 在第三象限, 且 $MH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 连接 NH 并延长交 C 于点 Q , 求 $\triangle MQN$ 的面积的最大值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - 1$, $g(x) = ax^2 - (a-2)x$.(1) 设函数 $H(x) = f'(x) - g(x)$, 讨论 $H(x)$ 的单调性;(2) 设函数 $G(x) = g(x) + (a-2)x$, 若 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两个不同的交点, 证明: $\ln(x_1 x_2) > 2 + \ln 2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 2\cos \beta, \\ y = 2\sin \beta \end{cases}$ (β 为参数), 直线 l 经过点 $M(-1, -2)$ 且倾斜角为 α .(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的参数方程;(2) 已知直线 l 与曲线 C 交于点 A, B , 且满足 $|MB| = 2|MA|$, 求 $\tan \alpha$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知关于 x 的不等式 $|2x-7| + |2x-3m| \geq 4m$ 的解集为 \mathbf{R} .(1) 求 m 的最大值 N ;(2) 若正数 a, b, c 满足 $a+b+c=N$, 证明: $16ab+4bc+ac \geq 49abc$.

高三数学试卷参考答案(理科)

1. C $z = \frac{2-2i}{(1+i)^2} = \frac{2-2i}{2i} = -1-i$.

2. D 因为 $A = \{x | 1 \leq x \leq 9\}$, $B = \{x | x \geq 6 \text{ 或 } x \leq -3\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 6 \leq x \leq 9\}$.

3. B $a_{10} = S_{10} - S_9 = 2^9 = 512$.

4. A $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x \in [\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

5. C 由 $f(x)$ 为偶函数, 得 $a=2$, 又定义域 $(-6m, m^2+9)$ 关于原点对称, 故 $m^2+9-6m=0$, 得 $m=3$, 则 $g(x) = \log_2(x-2)+3$, 故 $g(x)_{\max} = g(10) = 6$.

6. D $i=1, a=2, S=0+1+2=3 < 50$;

$i=2, a=4, S=3+2+4=9 < 50$;

$i=3, a=8, S=9+3+8=20 < 50$;

$i=4, a=16, S=20+4+16=40 < 50$;

$i=5, a=32, S=40+5+32=77 > 50$.

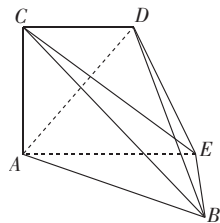
跳出循环, 故 $i=5$.

7. B 四名学生参加三科竞赛, 每科冠军都有四种情况, 共有 $4^3 = 64$ 种, 三科竞赛冠军分别来自三个不同班级共有 $C_2^1 A_3^3 = 12$ 种不同情况, 故所求概率为 $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

8. A 由题意, 如图所示, $AC \perp AB, AC \perp CD$, 过点 A 作 CD 的平行线 AE , 则 $AC \perp$ 平面 ABE , 且 $\angle EAB$ 为 30° 或 150° , 从 B 点向 AE 作垂线, 垂足为 E , 易证 $BE \perp$ 平面 ACD .

点 B 到平面 ACD 的距离 $BE = AB \cdot \sin \angle EAB = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$,

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = 6$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ACD} \cdot BE = 5$.



9. C 因为 $a_{n+1} = -\frac{1}{3} S_n S_{n+1}$, 所以 $S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{3} S_n S_{n+1}$, 所以 $\frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{1}{3}$.

又 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{2}$, 所以 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列,

所以 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{22}} = 22 \times \frac{1}{2} + \frac{22 \times 21}{2} \times \frac{1}{3} = 88$.

10. A 设该正四面体的棱长为 a , 外接球的半径为 R , 内切球的半径为 r ,

由 $R^2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}a - R)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2$, 得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

由 $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a) \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = 4 \times \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a) \cdot r$, 得 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

因为 $4\pi(R^2 - r^2) = 12\pi$, 所以 $a=3$.

11. D 过 P 作准线的垂线交准线于 M (图略), 则 $|PM| = |PF|$, 由 $|PH| = k|PF|$, 可得 $k = \frac{|PH|}{|PF|} = \frac{|PH|}{|PM|}$. 设

$$P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right), \text{ 则 } k = \frac{|PH|}{|PM|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{y_0^2}{4} + 1\right)^2 + y_0^2}}{\frac{y_0^2}{4} + 1}, \text{ 令 } t = \frac{y_0^2}{4} + 1, \text{ 则 } k = \frac{|PH|}{|PM|} = \frac{\sqrt{t^2 + 4(t-1)}}{t} = \sqrt{1 + \frac{4}{t} - \frac{4}{t^2}} =$$

$\sqrt{-4\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}$, 当 $t=2$ 时, k 取到最大值, 即当 $t = \frac{y_0^2}{4} + 1 = 2$ 时, k 取到最大值, 此时 $y_0 = \pm 2$. 不妨设

$P(1, 2)$, 又因为双曲线的焦点坐标为 $(\pm 1, 0)$, 所以可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$, 将 $P(1, 2)$ 代入上

式, 求得 $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3-2\sqrt{2}} - \frac{y^2}{2\sqrt{2}-2} = 1$.

12. B 因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, 所以 $\vec{CO} \cdot \vec{CA} = |\vec{CO}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos\langle \vec{CO}, \vec{CA} \rangle = |\vec{CA}| \cdot \frac{1}{2} |\vec{CA}| = \frac{1}{2} |\vec{CA}|^2 = 18$, 同理 $\vec{CO} \cdot \vec{CB} = 32$.

因为 $\tan\angle ACB = \sqrt{7}$, 所以 $\cos\angle ACB = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{CO} \cdot \vec{CA} = m\vec{CB} \cdot \vec{CA} + n\vec{CA}^2 = 12\sqrt{2}m + 36n = 18, \\ \vec{CO} \cdot \vec{CB} = m\vec{CB}^2 + n\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 64m + 12\sqrt{2}n = 32, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2\sqrt{2}m + 6n = 3, \\ 16m + 3\sqrt{2}n = 8, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{16-3\sqrt{2}}{28}, \\ n = \frac{12-4\sqrt{2}}{21}, \end{cases} \text{ 故 } m-n = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

13. 5 由 $(1+2)^n = 3^n = 243$, 得 $n=5$.

14. -2 $f'(x) = 6x + ae^x, f'(0) = a = -2$.

15. 4 若 $\frac{x^2}{5-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda-1} = 1$ 表示椭圆, 则 $\begin{cases} 5-\lambda > 0, \\ \lambda-1 < 0, \end{cases}$ 得 $\lambda < 1$, 设离心率为 e , 则 $e^2 = \frac{4}{5-\lambda} = \lambda$, 解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 4$, 两

解均不合题意; 若 $\frac{x^2}{5-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda-1} = 1$ 表示双曲线, 则 $(5-\lambda)(\lambda-1) > 0$, 得 $1 < \lambda < 5$, 设离心率为 e , 则 $e^2 = \frac{4}{5-\lambda} = \lambda$, 得 $\lambda = 1$ (舍去) 或 $\lambda = 4$.

16. $3+\sqrt{5}$ 设 $f(x)$ 的“完美区间”为 $[a, b]$, 易知 $b > a \geq 0$.

当 $0 < b \leq 1$ 时, 由 $f(x)$ 的图象知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases} f(a) = 1 - a^2 = b, \\ f(b) = 1 - b^2 = a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases}$

此时 $2(b-a) = 2$.

当 $b > 1$ 时, ①若 $a = 0$, 则 $f(b) = b^2 - 1 = b > 1$, 解得 $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 此时 $2(b-a) = 1 + \sqrt{5}$;

②若 $0 < a \leq 1$, 则最小值为 $f(1) = 0 \neq a$, 不合题意;

③若 $a > 1$, 则由图象知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 所以 $\begin{cases} f(a) = a^2 - 1 = a, \\ f(b) = b^2 - 1 = b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (舍去).

综上, 函数 $f(x)$ 的所有“完美区间”的“复区间长度”的和为 $3 + \sqrt{5}$.

17. 解: (1) $\because a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = (b+c)^2 - 2bc - 2bccos A, \dots\dots\dots 3$ 分

$\therefore 3 = 9 - 3bc, \therefore bc = 2, \dots\dots\dots 4$ 分

$\therefore S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6分

(2) $\because \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = \sqrt{3}, b + c = 3,$

$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 3 + (3-b)^2 - 2\sqrt{3} \times (3-b) \times \frac{\sqrt{3}}{3},$ 8分

$\therefore b = c = \frac{3}{2}$ 10分

$\because \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}, \therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{4},$ 11分

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ 12分

18. 解: (1) 根据题意, 可得

$\mu = \frac{5 \times 10 + 15 \times 185 + 25 \times 265 + 35 \times 400 + 45 \times 115 + 55 \times 25}{1000} = 30$ 3分

又 $12 = 30 - 2 \times 9, 48 = 30 + 2 \times 9$, 所以 $P(12 \leq Y \leq 48) = 0.9544$, 所以 $1000 \times 0.9544 \approx 954$ 人.

故答对题数在 $(12, 48]$ 内的人数约为 954. 5分

(2) 由条件知, X 的可能取值为 0, 10, 20, 30, 40.

$P(X=0) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}; P(X=10) = C_2^1 \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10};$

$P(X=20) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^2 \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{37}{100}; P(X=30) = C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5};$

$P(X=40) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ 10分

X 的分布列为

X	0	10	20	30	40
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$

$EX = 0 \times \frac{9}{100} + 10 \times \frac{3}{10} + 20 \times \frac{37}{100} + 30 \times \frac{1}{5} + 40 \times \frac{1}{25} = 18$ 元. 12分

19. (1) 证明: 记 SD 的中点为 G , 连接 GF, GA 1分

因为 E, F 分别为 AB, SC 的中点,

则 $GF \parallel CD$, 且 $GF = \frac{1}{2}CD$ 2分

因为 $AE \parallel CD$, 且 $AE = \frac{1}{2}CD$,

所以 $GF \parallel AE$ 且 $GF = AE$ 3分

所以四边形 $GFEA$ 为平行四边形,

则 $EF \parallel AG$ 4分

又 $EF \not\subset$ 平面 $SAD, AG \subset$ 平面 SAD ,

所以 $EF \parallel$ 平面 SAD 5分

(2) 解: 以 D 为原点, 分别以 $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DS}$ 为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $S(0,0,8), D(0,0,0), E(4,2,0), F(0,2,4)$,

$\overrightarrow{DE} = (4,2,0), \overrightarrow{DF} = (0,2,4), \overrightarrow{EF} = (-4,0,4), \overrightarrow{ES} = (-4,-2,8)$ 7分

设平面 DEF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{m} = 4x_1 + 2y_1 = 0, \\ \overrightarrow{DF} \cdot \mathbf{m} = 2y_1 + 4z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = 2$, 得 $\mathbf{m} = (2, -4, 2)$ 9分

设平面 SEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

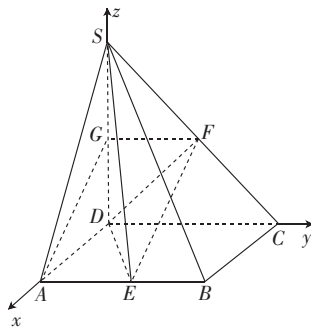
$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{n} = -4x_2 + 4z_2 = 0, \\ \overrightarrow{ES} \cdot \mathbf{n} = -4x_2 - 2y_2 + 8z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2 = 2$, 得 $\mathbf{n} = (2, 4, 2)$ 11分

$$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = -\frac{1}{3},$$

设二面角 $D-EF-S$ 为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

即二面角 $D-EF-S$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 12分



20. 解: (1) 设 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 则 $|\mathbf{m}| = |(x+\sqrt{2}, y)| = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2} = |PF_1|$,

$$|\mathbf{n}| = |(x-\sqrt{2}, y)| = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2} = |PF_2|.$$

又 $|\mathbf{m}| + |\mathbf{n}| = 4, |PF_1| + |PF_2| = 4$, 2分

由椭圆的定义可知 P 的轨迹是以 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$ 为焦点, 4 为长轴的椭圆.

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5分

(2) 由题意可知直线 l 的斜率一定存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx (k > 0)$,

$$\text{与椭圆 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ 联立可得 } (1+2k^2)x^2 = 4,$$

所以 $x = \frac{\pm 2}{\sqrt{2k^2+1}}, M(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}), N(\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}})$ 6分

点 H 的坐标为 $(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}, 0)$, 直线 HN 的方程为 $y = \frac{k}{2}(x + \frac{2}{\sqrt{2k^2+1}})$,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 可得 } (\frac{k^2}{2} + 1)x^2 + \frac{2k^2x}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{-6k^2-4}{2k^2+1} = 0,$$

所以 $x_Q \cdot x_N = \frac{-6k^2-4}{(\frac{k^2}{2} + 1) \cdot (2k^2+1)}$ 7分

$$\text{因为 } x_N = \frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, \text{ 所以 } x_Q = -\frac{6k^2+4}{(k^2+2) \cdot \sqrt{2k^2+1}},$$

Q 的坐标为 $(-\frac{6k^2+4}{(k^2+2) \cdot \sqrt{2k^2+1}}, \frac{-2k^3}{(k^2+2) \cdot \sqrt{2k^2+1}})$, 8分

于是 $k_{QM} = -\frac{1}{k}$, 所以 $k_{QM} \cdot k_{MN} = -1$, 即 $QM \perp MN$ 9分

$$\text{因为 } |MN| = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}, |QM| = \frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}},$$

所以 $S_{\triangle QMN} = \frac{1}{2} \cdot |QM| \cdot |MN| = \frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}$ 10分

令 $f(k) = \frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2} (k>0)$, $f'(k) = \frac{-8(k+1)(k-1)(2k^4+3k^2+2)}{(2k^4+5k^2+2)^2}$, 由 $f'(k)>0$, 可得 $0<k<1$, $f(k)$ 在

$(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 因此当 $k=1$ 时, 函数 $f(k)$ 有最大值, 最大值为 $f(1) = \frac{16}{9}$, 即

$S_{\triangle QMN}$ 的最大值为 $\frac{16}{9}$ 12分

21. (1) 解: $H(x) = f'(x) - g(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x + 1$,

$H'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{-2ax^2 + (a-2)x + 1}{x} = \frac{(-2x+1)(ax+1)}{x}$ 1分

当 $a \geq 0$ 时, $H(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, $H(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减. 2分

当 $-2 < a < 0$ 时, 令 $H'(x) > 0$, 得 $x \in (-\frac{1}{a}, +\infty) \cup (0, \frac{1}{2})$, 所以 $H(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty), (0, \frac{1}{2})$ 上单调递

增; 令 $H'(x) < 0$, 得 $x \in (\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$, 所以 $H(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$ 上单调递减. 3分

当 $a = -2$ 时, $H'(x) \geq 0$, $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 4分

当 $a < -2$ 时, 令 $H'(x) > 0$, 得 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \cup (0, -\frac{1}{a})$, 所以 $H(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a}), (\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

令 $H'(x) < 0$, 得 $x \in (-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$, 所以 $H(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 上单调递减. 5分

(2) 证明: $G(x) = g(x) - (a-2)x = ax^2$,

因为函数 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有两个不同交点,

所以关于 x 的方程 $ax^2 = x \ln x - 1$, 即 $ax = \ln x - \frac{1}{x}$ 有两个不同的根.

由题知 $\ln x_1 - \frac{1}{x_1} = ax_1$ ①, $\ln x_2 - \frac{1}{x_2} = ax_2$ ②,

①+②得 $\ln(x_1 x_2) - \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = a(x_1+x_2)$ ③,

②-①得 $\ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2-x_1}{x_1 x_2} = a(x_2-x_1)$ ④.

由③, ④得 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_2-x_1} \ln \frac{x_2}{x_1}$, 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 记 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$.

令 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t>1)$, 则 $F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} > 0$, 8分

所以 $F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(t) > F(1) = 0$,

则 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 即 $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$, 所以 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_2-x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2$.

因为 $\ln(x_1 x_2) - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} < \ln(x_1 x_2) - \frac{4\sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2} = \ln(x_1 x_2) - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} = 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}}$.

所以 $2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} > 2$, 即 $\ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1$.

令 $\varphi(x) = \ln x - \frac{2}{x}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 10分

又 $\ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e} = \frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{e} < 1$, 所以 $\ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1 > \ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e}$,

即 $\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > \varphi(\sqrt{2}e)$, 所以 $x_1 x_2 > 2e^2$ 11分

两边同时取对数可得 $\ln(x_1 x_2) > 2 + \ln 2$, 得证. 12分

22. 解: (1) 将曲线 $C: \begin{cases} x=3+2\cos\beta, \\ y=2\sin\beta \end{cases}$ (β 为参数), 消参得 $(x-3)^2 + y^2 = 4$, 3分

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+t\cos\alpha, \\ y=-2+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 \leq \alpha < \pi$). 5分

(2) 设 A, B 对应的参数分别为 t_A, t_B , 将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程,

整理得 $t^2 - 4t(\sin\alpha + 2\cos\alpha) + 16 = 0$, 6分

所以 $t_A + t_B = 4(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$, $t_A \cdot t_B = 16$ 7分

因为 $|MB| = 2|MA|$, 所以 $t_B = 2t_A$,

因此 $t_A = \frac{4}{3}(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$, $t_B = \frac{8}{3}(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$, 8分

所以 $t_A \cdot t_B = \frac{32}{9}(\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 = 16$, 展开整理可得 $\frac{3}{4}\cos 2\alpha = 1 - \sin 2\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$,

解得 $\tan\alpha = 1$ 或 $\frac{1}{7}$ 10分

23. (1) 解: 令 $f(x) = |2x-7| + |2x-3m|$, 则关于 x 的不等式 $|2x-7| + |2x-3m| \geq 4m$ 的解集为 \mathbf{R} ,

等价于 $f(x)_{\min} \geq 4m$ 1分

因为 $|2x-7| + |2x-3m| \geq |(2x-7) - (2x-3m)| = |3m-7|$.

当且仅当 $(2x-7)(2x-3m) \leq 0$ 时取等号, 3分

所以 $f(x)_{\min} = |3m-7|$.

由 $|3m-7| \geq 4m$, 得 $m \leq 1$, 所以 $N=1$ 5分

(2) 证明: 要证 $16ab + 4bc + ac \geq 49abc$, 只需证 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} + \frac{16}{c} \geq 49$ 6分

因为 $\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{4} = 4$, $\frac{16a}{c} + \frac{4c}{a} \geq 2\sqrt{64} = 16$, $\frac{16b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{16} = 8$, 8分

所以 $(a+b+c)(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} + \frac{16}{c}) = 21 + (\frac{a}{b} + \frac{4b}{a}) + (\frac{16a}{c} + \frac{4c}{a}) + (\frac{16b}{c} + \frac{c}{b}) \geq 49$, 9分

当且仅当 $a = \frac{2}{7}, b = \frac{1}{7}, c = \frac{4}{7}$ 时, 等号成立. 10分