

# 理科数学

命题学校：广州二中

本试卷共 5 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. C 2. A 3. B 4. D 5. A 6. D 7. D 8. C 9. C 10. A 11. C 12. B

7. 解：  $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{4})$ ，所以  $\omega = 2$ ，又  $f(-x) = -f(x)$  知  $f(x)$  为奇函数，

$\therefore \varphi + \frac{\pi}{4} = k\pi \therefore f(x) = \sqrt{2} \sin 2x$ ，选 D

10. 答案：A 解答：

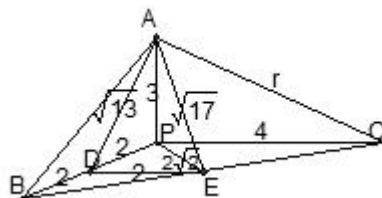
$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r) \frac{M_1}{R^3} \Rightarrow \frac{M_1}{R^2(1+\alpha)^2} + \frac{M_2}{R^2\alpha^2} = (1+\alpha) \frac{M_1}{R^2}$$

所以有  $\frac{M_2}{\alpha^2} = M_1 \times [(1+\alpha) - \frac{1}{(1+\alpha)^2}] = M_1 \times \frac{3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3}{(1+\alpha)^2}$

化简可得  $M_2 = M_1 \times \frac{3\alpha^3 + 3\alpha^4 + \alpha^5}{(1+\alpha)^2} \approx M_1 \times 3\alpha^3 \Rightarrow \alpha^3 = \frac{M_2}{3M_1}$ ，可得  $r = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} R$ 。

11. 由条件知

$$\begin{aligned} PA \perp PB, PB \perp PC, PC \perp PA, \\ PA = 3, PB = PC = 4, (2R)^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2 \\ \therefore S_{\text{球面}} = 4\pi R^2 = 41\pi \end{aligned}$$



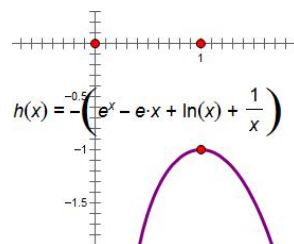
12. 解：函数  $f(x) = e^x - ex + a$  与  $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  的图象上存在关于  $x$  轴对称的点

即方程  $e^x - ex + a + \ln x + \frac{1}{x} = 0$  有解， $a = -\left(e^x - ex + \ln x + \frac{1}{x}\right) = h(x)$

$a$  的取值范围是  $y = h(x)$  ( $x > 0$ ) 的值域  $M$

$$\begin{aligned} \therefore h'(x) &= -\left(e^x - e + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\left[\left(e^x - e\right) + \frac{1}{x^2}(x-1)\right] \\ \therefore x=1 &\Leftrightarrow h'(x) = 0; 0 < x < 1 \Leftrightarrow h'(x) > 0; x > 1 \Leftrightarrow h'(x) < 0; \end{aligned}$$

所以  $h(x)_{\max} = h(1) = -1$



显然  $h(x)$  图象连续且当  $x \rightarrow +\infty, h(x) \rightarrow -\infty$  所以  $a$  的取值范围  $(-\infty, -1]$

解法 2: (特殊解法)

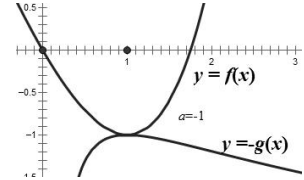
$$\because f'(x) = e^x - e \therefore 0 < x < 1, f'(x) < 0; x > 1, f'(x) > 0; \therefore f(x)_{\min} = f(1) = a$$

函数  $f(x) = e^x - ex + a$  与  $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  的图象上存在关于  $x$  轴对称的点即

函数  $f(x) = e^x - ex + a$  与  $m(x) = -g(x) = -\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$  的图象上存在公共点

$$\therefore m'(x) = -g'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -\frac{x-1}{x^2} \therefore m(x)_{\max} = -g(1) = -1$$

如图示当且仅当  $f(x)_{\min} \leq m(x)_{\max}$  即  $a \leq -1$  时满足条件。



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答 1

14. 答  $-\sqrt{3}$

15. 答  $\frac{1}{2}$

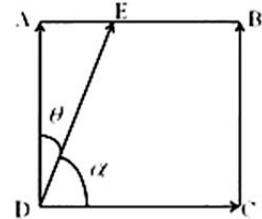
16. 答  $[0, 3e^2]$

解析:

13. 解: 根据平面向量的数量积公式

$$\vec{DE} \cdot \vec{CB} = \vec{DE} \cdot \vec{DA} = |\vec{DE}| \cdot |\vec{DA}| \cos \theta,$$

由图可知,  $|\vec{DE}| \cdot \cos \theta = |\vec{DA}|$ , 因此  $\vec{DE} \cdot \vec{CB} = |\vec{DA}|^2 = 1$ ,



14.  $(a+b+c)(a-b+c) = ac$ ,  $\Leftrightarrow (a+c)^2 - b^2 = ac \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = -ac$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{-ac}{2ac} = -\frac{1}{2} \therefore 0 < B < \pi \therefore B = 120^\circ, \text{ 则 } \tan B = -\sqrt{3}.$$

15. 解  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 则  $b_n = \frac{b_1}{2^{n-1}}$ ,  $\therefore a_8 - a_1 = a_8 - a_7 + a_7 - a_6 + \dots + a_2 - a_1 = \frac{b_1 \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{128} - 1$

$$\therefore b_1 = -\frac{1}{2} = a_2 - a_1 \therefore a_2 = \frac{1}{2}$$

16. 已知不等式  $xe^{2x} \geq kx - 2e^2$  恒成立, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

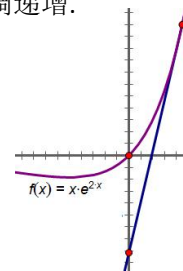
解: 直线  $l: y = kx - 2e^2$  是斜率为  $k$  且过点  $(0, -2e^2)$  的直线,  $f(x) = xe^{2x}, f'(x) = e^{2x}(1+2x)$

易知  $x < -\frac{1}{2}$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减;  $x > -\frac{1}{2}$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增。

$$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} > -2e^2, \text{ 当 } x \in (-\infty, 0], f(x) \in \left[-\frac{1}{2}e^{-1}, 0\right]$$

所以  $k < 0$  时,  $\exists x_0 < 0, kx_0 - 2e^2 > 0 > f(x_0)$  不符合条件

所以  $k = 0$  时,  $kx - 2e^2 = -2e^2 < f(x)$  符合条件



$k > 0$  时, 若  $x \leq 0$ , 则  $f(x) > -2e^2 > kx - 2e^2$ , 所以只需再考虑  $x > 0$  的情况:

法一:

如图示设  $k = k_0 > 0$  时直线  $l$  与  $y = f(x)$  相切, 则当且仅当  $0 \leq k \leq k_0$  时符合条件

设直线  $l$  与  $y = f(x)$  相切于点  $(x_0, x_0 e^{2x_0})$ ,  $x_0 > 0$ , 则  $k_0 = e^{2x_0}(1 + 2x_0)$ ,  $x_0 e^{2x_0} = y_0 = k_0 x_0 - 2e^2$

$$\therefore x_0 e^{2x_0} = e^{2x_0}(1 + 2x_0)x_0 - 2e^2 \Leftrightarrow e^{2x_0}x_0^2 = e^2 \text{ 所以 } \therefore x_0 = 1, k_0 = 3e^2 \therefore k \in [0, 3e^2]$$

注  $g(x) = x^2 e^{2x} (x > 0)$ ,  $g'(x) = e^{2x}(2x + 2x^2) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  递增, 且  $g(1) = e^2$ .

法二:  $x > 0$  时:

$$f(x) = e^{2x} + \frac{2e^2}{x}, f'(x) = 2e^{2x} - \frac{2e^2}{x^2} = g(x), g'(x) = 4e^{2x} + \frac{4e^2}{x^3} > 0 (x > 0),$$

$f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增;  $f'(1) = 0$

$\therefore 0 < x < 1, f'(x) < 0; x > 1, f'(x) > 0;$

$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 3e^2$ .

$$\therefore x > 0 \text{ 时, } e^{2x} + \frac{2e^2}{x} \geq k \Rightarrow k \leq 3e^2$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 3e^2$$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:(I)  $\because \mathbf{a} = (2 \cos x, \sqrt{3} \cos x), \mathbf{b} = (\cos x, 2 \sin x), x \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cos x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos x \cdot 2 \sin x \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 所以  $f(x)$  最小正周期为  $\pi$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $\alpha = (2x + \frac{\pi}{6}) \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ ,  $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$\therefore \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin \alpha \in [f(\frac{7\pi}{6}), f(\frac{\pi}{6})] = [-\frac{1}{2}, 1]$ .  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$f(x) = 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1 = 2 \sin \alpha + 1 \in [0, 3]$$

所以  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值和最小值分别为 3, 0.  $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

18 解: (1) 由  $S_n = 2a_n - 2$  ( $n \in N^*$ ) 得  $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$  ( $n \geq 2$ ), .....1 分

$$a_1 = S_1 = 2a_1 - 2 \therefore a_1 = 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore a_n = 2a_{n-1} \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是首项  $a_1 = 2$  且公比  $q = 2$  的等比数列. ....5 分

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) b_n = \log_2(a_n a_{n+1}) = \log_2(2^n \cdot 2^{n+1}) = 2n + 1, \therefore b_n - b_{n-1} = 2 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是等差数列,  $\therefore T_n = \frac{1}{2}n(b_1 + b_n) = n(n+2)$  .....8 分

$$\therefore \frac{1}{T_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) < 1 \quad (n \in N^*)$$

.....12 分

19. (I) 由已知得  $AC \perp BD$ ,  $AD = CD$ , 又由  $AE = CF$  得  $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$ , 故  $AC \parallel EF$ .

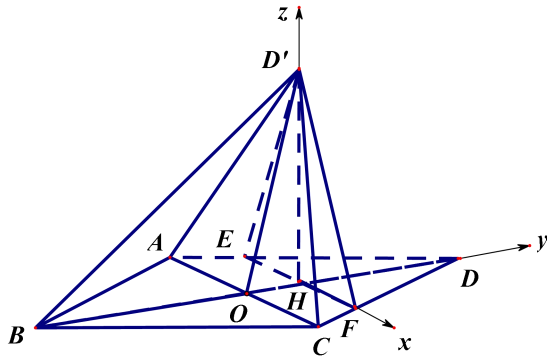
因此  $EF \perp HD$ , 从而  $EF \perp D'H$  ..... 2 分

$$\text{由 } AB = 5, AC = 8, AO = 4, \text{ 得 } DO = BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 3.$$

$$\text{由 } EF \parallel AC \text{ 得 } \frac{OH}{DO} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } OH = 1, D'H = DH = 2.$$

于是  $D'H^2 + OH^2 = 2^2 + 1^2 = 5 = D'O^2$ , 故  $D'H \perp OH$ . .... 4 分

又  $D'H \perp EF$ , 而  $OH \cap EF = H$ , 所以  $D'H \perp$  平面  $ABCD$ . .... 5 分



(II) 如图, 以  $H$  为坐标原点,  $\overrightarrow{HF}$  的方向为  $x$  轴的正方向, 建立空间直角坐标系  $H-xyz$ , 则  $H(0,0,0)$ ,  $A(-4,-1,0)$ ,  $B(0,-4,0)$ ,  $C(4,-1,0)$ ,  $D'(0,0,2)$ ,  
 $\overrightarrow{BA} = (-4,3,0)$ ,  $\overrightarrow{BD'} = (0,4,2)$ . ..... 7 分

设  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$  是平面  $ABD'$  的法向量, 则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD'} = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} -4x_1 + 3y_1 = 0 \\ 4y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$ ,

所以可以取  $\vec{m} = (3, 4, -8)$ . ..... 9 分

因菱形  $ABCD$  中有  $BO \perp OC$ , 又由 (1) 知  $D'H \perp OC$ ,  $\therefore OC \perp$  平面  $BD'O$

所以  $\vec{n} = \overrightarrow{OC} = (4, 0, 0)$  是平面  $BOD'$  的法向量, ..... 10 分

设二面角  $A-BD'-O$  为  $\theta$ , 由于  $\theta$  为锐角,

$$\text{于是 } \cos \theta = \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{\|\vec{m}\| \|\vec{n}\|} = \frac{3 \times 4}{\sqrt{89} \times 4} = \frac{3\sqrt{89}}{89}.$$

因此二面角  $A-BD'-O$  的余弦值是  $\frac{3\sqrt{89}}{89}$ . ..... 12 分

20. 解: (1) 由题设及正弦定理得  $\sin A \sin \frac{A+C}{2} = \sin B \sin(B+C)$ . ..... 2 分

又因为  $\triangle ABC$  中  $A+B+C=180^\circ$  可得  $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$ ,  $\sin(B+C) = \sin A$

所以  $\sin A \cos \frac{B}{2} = \sin B \sin A$ , ..... 4 分

因为  $\triangle ABC$  中  $\sin A \neq 0$ , 故  $\cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ . ..... 5 分

因为  $\cos \frac{B}{2} \neq 0$ , 故  $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ , 因此  $B=60^\circ$ . ..... 6 分

(2) 由题设及(1)知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . .....7分

由正弦定理得 $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ . .....8分

$$= \frac{2 \sin(120^\circ - C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1. \quad \dots\dots\dots 9分$$

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 $0^\circ < A < 90^\circ$ ,  $0^\circ < C < 90^\circ$ ,  
由(1)知 $A+C=180^\circ - B=120^\circ$ , 所以 $30^\circ < C < 90^\circ$ , .....10分

故 $\tan C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$  .....11分

所以 $1 < a < 4$ , 从而 $\frac{\sqrt{3}}{2} < S_{\triangle ABC} < 2\sqrt{3}$ .

因此,  $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$ . .....12分

21. (1)据题意,  $AC = x \text{ km}$ ,  $BC = (30-x) \text{ km}$ ,  $\therefore x > 0, 30-x > 0 \therefore 0 < x < 30$  .....1分

且建在 $C$ 处的垃圾处理厂对城 $A$ 的影响度为 $\frac{2.7}{x^2}$ , 对城 $B$ 的影响度为 $\frac{k}{(30-x)^2}$ ,

因此总影响度 $y = \frac{2.7}{x^2} + \frac{k}{(30-x)^2} (0 < x < 30)$ . .....3分

又因为当垃圾处理厂 $C$ 与城 $A$ 距离为 $10 \text{ km}$ 时对城 $A$ 和城 $B$ 的总影响度为 $0.029$ .

所以 $\frac{2.7}{10^2} + \frac{k}{20^2} = 0.029 \therefore k = 0.8$ . 所以 $y = \frac{2.7}{x^2} + \frac{0.8}{(30-x)^2} (0 < x < 30)$ . .....5分

(2) 因为 $y' = -2 \cdot \frac{2.7}{x^3} + 2 \cdot \frac{0.8}{(30-x)^3} = -0.2 \cdot \frac{27(30-x)^3 - 8x^3}{x^3(30-x)^3}$ . .....8分

由 $y' = 0$ 解得 $[3(30-x)]^3 = (2x)^3 \therefore 3(30-x) = 2x \therefore x = 18$ .

由 $y' < 0$ 解得 $[3(30-x)]^3 > (2x)^3 \therefore 3(30-x) > 2x \therefore x < 18$

由 $y' > 0$ 解得 $[3(30-x)]^3 < (2x)^3 \therefore 3(30-x) < 2x \therefore x > 18$

所以 $y$ ,  $y'$ 随 $x$ 的变化情况如下表:

$x$	$(0, 18)$	18	$(18, 30)$
$y'$	-	0	+
$y$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

由表可知, 函数在 $(0, 18)$ 内单调递减, 在 $(18, 30)$ 内单调递增, .....10分

$y_{\text{最小值}} = y|_{x=18} = \frac{1}{72}$ , 此时 $x = 18$ , .....11分

故在线段 $AB$ 上存在 $C$ 点, 使得建在此处的垃圾处理厂对城 $A$ 和城 $B$ 的总影响度最小, 该点与城 $A$ 的距离 $x = 18 \text{ km}$ . .....12分

22. 解: (1)函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} + 2ax, \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

若  $a=0$ , 记  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} (x > 0)$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2} (x > 0) \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$\therefore 0 < x < 2, g'(x) < 0; x > 2, g'(x) > 0$

$\therefore g(x)$  的单调减区间为  $(0, 2)$ , 单调增区间为  $(2, +\infty)$ .

$\therefore g(x)_{\min} = g(2) = \ln 2 + 1$

$\therefore f'(x)$  的最小值为  $\ln 2 + 1 \dots\dots\dots 3 \text{分}$

(2)

$f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增当且仅当  $f'(x) \geq 0 (x > 0)$  恒成立,  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

即  $f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} + 2ax \geq 0 (x > 0)$  恒成立,

$\therefore f'(1) = 2 + 2a \geq 0 \therefore a \geq -1 \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(i) 若  $a \geq 0$ , 由 (1) 知

$$\therefore x > 0, a \geq 0 \therefore f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} + 2ax \geq \ln x + \frac{2}{x} = g(x) \geq \ln 2 + 1 > 0$$

$\therefore f(x)$  在定义域上单调递增, 满足条件  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(ii) 若  $-1 \leq a < 0$ ,

$$f'(e^{-\frac{1}{a}}) = -\frac{1}{a} + \frac{2}{e^{-\frac{1}{a}}} + 2ae^{-\frac{1}{a}}$$

$$\text{令 } t = -\frac{1}{a} \geq 1, m(t) = t + \frac{2}{e^t} - \frac{2e^t}{t} < 2t - \frac{2e^t}{t} = \frac{2(t^2 - e^t)}{t} (t \geq 1 > \frac{2}{e^t})$$

$t \geq 1 \Rightarrow (2t - e^t)' = 2 - e^t \leq 2 - e < 0 \Rightarrow 2t - e^t$  在  $[1, +\infty)$  递减

$\therefore t \geq 1 \Rightarrow (t^2 - e^t)' = 2t - e^t \leq 2 - e < 0 \Rightarrow t^2 - e^t$  在  $[1, +\infty)$  递减

$\therefore t \geq 1 \Rightarrow t^2 - e^t \leq 1 - e < 0 \Rightarrow m(t) < 0$

所以取  $t = -\frac{1}{a} \geq 1$ , 有  $f'(e^{-\frac{1}{a}}) = -\frac{1}{a} + \frac{2}{e^{-\frac{1}{a}}} - \frac{2e^{-\frac{1}{a}}}{-\frac{1}{a}} = m(t) < 0$ , 不合题意  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

综上所述, 若  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是  $[0, +\infty)$   $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

(2)法二:  $f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} + 2ax \geq 0 (x > 0) \Leftrightarrow -2a \leq \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} (x > 0)$   $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

记  $h(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} (x > 0)$ , 则

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x - x \ln x - 4}{x^3} (x > 0) \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

记  $t(x) = x - x \ln x - 4 (x > 0)$ , 则  $t'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x (x > 0)$

$\therefore 0 < x < 1, t'(x) > 0; x > 1, t'(x) < 0$

$\therefore t(x)_{\max} = t(1) = -3 < 0 \therefore t(x) < 0, h'(x) < 0$

$\therefore h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减 .....6 分

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(根据洛比塔法则) .....7 分

$\therefore -2a \leq 0 \therefore a \geq 0$  .....8 分

(无单调性证明扣 2 分)

(3) 若  $a = -1$ ,  $f(x) = (x+2)\ln x - x^2 - x$ ,  $f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2x$  ( $x > 0$ ),  $f'(1) = 0$

$g(x) = f'(x)$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - 2 = \frac{-2x^2 + x - 2}{x^2}$  ( $x > 0$ ),  $\therefore g'(x) < 0 \therefore f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减

$\therefore$  当  $0 < x < 1$  时  $f'(x) > f'(1) = 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增;

当  $x > 1$  时  $f'(x) < f'(1) = 0$ ,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$ ,  $x_1 < x_2 \therefore 0 < x_1 < 1 < x_2$  .....9 分

令  $d(x) = f(x) - f(2-x)$  ( $0 < x \leq 1$ ), 则

$d'(x) = f'(x) + f'(2-x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2x + \ln(2-x) + \frac{2}{(2-x)} - 2(2-x)$

$= \ln[x(2-x)] + \frac{4}{x(2-x)} - 4 = \ln t + \frac{4}{t} - 4 = l(t)$ , 其中令  $t = x(2-x) \in (0, 1]$

当  $0 < t < 1$  时  $l'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{t^2} = \frac{t-4}{t^2} < 0, \therefore l(t)$  在  $(0, 1)$  在递减,  $l(t) > l(1) = 0$ ,

$\therefore d'(x) > 0 \therefore d(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增

.....11 分

$\therefore 0 < x_1 < 1 \therefore d(x_1) < d(1) = 0 \therefore f(x_1) < f(2-x_1) \therefore f(x_2) = f(x_1) < f(2-x_1)$

又  $\therefore 2-x_1 > 1, x_2 > 1, f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减

$\therefore x_2 > 2-x_1 \therefore x_1 + x_2 > 2$ .

.....12 分